中京大学経済学論叢
25号
2014年３月

家族における子の数および教育投資の選択と公的教育政策の効果*

釜　田　公　良
佐　藤　　　隆
二　神　律　子

＊本研究は科学研究費補助金（21530319）を受けた。

1. はじめに

「家計調査」(総務庁)によれば，勤労者世帯における教育支出が可処分所得に占める割合は1990年代初頭まで上昇を続け（1980年2.8%→1992年3.9%），その後一旦安定的に推移したものの，1999年（3.7%）から再び上昇し始め2011年には4.4%となっている．一方で，「国民生活基礎調査」（厚生労働省）によれば，「児童（18歳未満の未婚の者）のいる世帯の平均児童数」は一貫して減少を続けており（1980年1.83人→2010年1.70人），子一人当たりの教育支出が一貫した増加傾向にあることは明らかである．さらに，「子どもの学習費調査」（文部科学省）において，家計が自由に選択できるはずである「補助学習費」が2006年度に小中学生ともに過去最高額となったことを考えると，家計が非常に積極的に子の教育に支出している現状を窺い知ることができる．また，補助教育費の増大は，わが国に限らず，東アジア諸国（韓国，台湾，香港）等でも共通に見られる現象である[1].

しかし，このような過剰ともとれる家計の教育投資行動に対して，理論的根拠を与えた研究は少ない．むしろ，先行研究の多くは，教育の生産に対する外部効果，教育資金に関する借入制約（Barham et al., 1995; De Fraja, 2002），戦略的遺産動機（Cremer et al., 1992），教育で獲得したスキルに対する雇用者側の不完全な評価（Blankenau and Camera, 2009）等のために，私的な教育投資は効率的な水準に比べて過少になると議論している．これに対して，Ihori, Kamada and Sato (2008）は，（子に対して）利他的な親と利己的な子の間のインタラクションの中で教育投資が決定されるモデルを構築し，親の所得がある水準より低い家族においては，家族の最適解と比べて，教育投資が過少になる一方で，親の所得がそれよりも高い家族においては，教育投資が過剰になることを示した．Ihori, Kamada and Sato (2008）においては，親は教育投資に加えて，子の所得が実現した後に所得移転を行うが，これにより若年期に過剰消費をする誘因が子に生じる．すなわち，サマリタンズ・ジレンマ（Buchanan, 1975）が発生するメカニズムが内在するが，若年期における子の借入の上限が親の所得水準に依存するため，親がサマリタンズ・ジレンマに直面するか否かは親の所得水準に依存する．親が低所得で厳しい借入制約下にある場合には，子が過剰消費を行うことは不可能であり，教育投資も過少となる．一方，親が高所得の場合には，子の借入制約はバインドしないかもしれないし，あるいはバインドしたとしてもサマリタンズ・ジレンマが発生する．このとき，親は子の異時点間消費配分を是正する（若年期から中年期へと消費をシフトさせる）ために，教育投資を増やそうとする結果，教育投資は効率的な水準と比べて過剰になる．

しかし，Ihori, Kamada and Sato (2008)においては，子の数は与件であり，子の数の選択が考慮されていない．前述のように，少子化と教育支出の増加は同時進行的に生じている現象であり，親が少ない子の数と大きな教育支出をセットで選択している可能性は高いと考えられる．そこで，本研究では，子の数を内生化して，子の数の過少性と教育投資の過剰

[1] Bray and Kwok (2003), Tansel and Bircan (2006).

性が同時に生じるための条件を検討する．

さらに，本研究では，教育投資と子の数における歪みを是正するための政策について検討する．とくに，ここでは，公的教育投資に着目する．小中学校におけるいわゆる「ゆとり教育」の実施と家計の教育支出の増加は無縁ではない.「ゆとり教育」の原点といえる 1980 年度実施の学習指導要領全部改正後の 80 年代に家計の教育支出は急増しており，再び増加傾向を示している 2000 年代には完全学校週 5 日制等を含む学習指導要領全部改正が実施されている（2002 年度）．そうした中，子どもの学力を守るために補助教育に積極的に支出する高所得者層とそれができない低所得者層との間で教育格差の問題が浮上している．われわれはこのような背景を踏まえて，公的教育投資をモデルに導入し，それが家族における教育投資と子の数の選択，および，家族の厚生に及ぼす影響を検討する．また，私的教育投資に対する補助金政策についても同様の分析を行い，政策オプションの間で効果を比較する．

以上の目的を遂行するために，子に対して利他的な親と利己的な子からなるモデルを構築する．このモデルの特徴は次の通りである．①子の所得は，私的教育投資（例えば，塾などの補助教育や高等教育に対する支出），公的教育投資（例えば，初中等教育の提供），および子のエフォートによって決まる．②私的教育投資の水準は親が決定し，費用も全額親が負担する．③政府による教育政策として，公的教育投資，および，私的教育投資への補助の 2 つを考える．これらの財源は親への一括税によって調達される．

子のエフォートは教育投資の限界生産性への影響（子のエフォートが高いほど教育投資の限界生産性も高まる）を通じて，私的教育投資及び子の数に関する親の選択に影響を与える．したがって，親と子の間にはインタラクションが発生する．ここでは，次のような親と子のゲームのタイミングを考える．第 1 段階において，政府の教育支出（公的教育投資，私的教育投資への補助）の水準を所与として，親が子の数を選ぶ．第 2 段階において，子は（小中学校や高校における）エフォートを選ぶ．第 3 段階において，親は子のエフォートを観察して，私的教育投資（例えば，補助教育費や大学に進学させるか否か）を決定する．

主な結果は次のとおりである．第 1 に，ゲームの均衡解においては，家族の最適解に比べて，子の数は過少で，教育投資及びエフォートは過剰になる．子がより高いエフォートを見せるほど，親はより多くの教育投資を行う．子はこのような親の行動を織り込んでエフォートを決めるので，子にとってのエフォートの限界生産性が高まり，エフォートは過剰になる．その結果，教育投資も過剰になる．また，教育投資の増加は子をもつことの限界費用を高めるため，子の数は過少になる．

第 2 に，公的教育投資の増加によって子の数は増加する．これは，公的教育投資が増えれば，それと代替性をもつ私的教育投資を減らすことができるため，親にとって子をもつことの限界費用が低下することによる．また，公的教育投資の増加は，子 1 人あたりの私的および公的教育投資の総額をむしろ減少させる．これは，直接的に私的教育投資を代替

する効果に加えて，子の数の増加を通じた間接効果によるものである．さらに，子の数の増加による教育投資の減少はエフォートの限界生産性を低下させ，エフォートの減少につながる．これらの結果より，公的教育投資の増加は，ゲームの均衡解の非効率性（子の数の過少性および教育投資・エフォートの過剰性）を縮小し，家族厚生を高める．

第 3 に，私的教育投資に対する補助率の引上げによって子の数が増えるか減るかは定まらないが，子の数が減る場合には，教育投資とエフォートはともに増加する．補助率の上昇は直接的に教育投資を増やす効果をもつのに加えて，子の数の減少を通じた間接的な効果も教育投資を増やす方向に働く．そして教育投資の増加はエフォートの限界生産性を高めるので，エフォートも増加する．したがって，私的教育投資への補助は，子の数の過少性と教育投資・エフォートの過剰性を増幅させ，家族厚生を低下させる可能性がある．

われわれと同様に，内生的な子の数と教育投資を含む利他主義モデルを用いて教育政策を分析した研究は，過去にいくつか存在する．Zhang (2003)は，人的資本の外部性を伴うモデルの下で社会的最適を達成するための教育補助と公債政策について検討している．そこでは，個人の人的資本がその経済の平均的な人的資本に依存するというかたちで教育が正の外部性をもつため，教育投資の過少性と子の数の過剰性が競争均衡において発生する．これはわれわれとは異なる結果であり，前述の少子化および過剰な教育投資という現象とも相容れない．また，子の数と経済成長に及ぼす影響に関して，Zhang (1997)は教育投資に対する補助と子に対する補助（児童手当）という 2 つの政策の比較を，Borck (2011)は公的教育の提供が中央政府による場合と地方政府による場合との比較を行っているが，いずれにおいても子の数や教育投資の過剰性・過少性に関しては議論されていない．

本論文の以下の構成は次のとおりである．2 節ではモデルを提示する．3 節では，ゲームの均衡解と家族の最適解を導出し，それらを比較する．4 節では，公的教育投資，私的教育投資への補助という 2 種類の教育政策を考え，それらがゲームの均衡に与える効果を分析する．そして，これらの教育政策によって家族の厚生が改善されるか否かを検討する．5 節では，得られた結果をまとめ，今後の研究の拡張の可能性について述べる．

2. モデル

本節では，一人の親と n 人の子からなる代表的家族と政府によって構成されるモデルを構築する．

親は，子の数 n を選択した後，可処分所得を消費 c_p，子に対する私的教育投資 k，および，子の養育費 β（所与）に配分する．親の予算制約は次式で与えられる．

(1)
$$c_p = I - n[(1-\rho)k + \beta] - T$$

ここで，I は親の所得（所与），ρ は私的教育に対する補助率，T は一括税である．

子の所得 Y は，私的教育投資，公的教育投資 g，および，自らのエフォート e に依存して，次のように決定される．

(2)
$$Y = \overline{y} + y(k+g,\ e)$$

ここで，$\overline{y}$ は教育投資もエフォートもゼロのときに得られる所得であり，

$y_k \equiv \partial y / \partial(k+g) > 0$，$y_e \equiv \partial y / \partial e > 0$，$y_{kk} \equiv \partial^2 y / [\partial(k+g)]^2 < 0$，$y_{ee} \equiv \partial^2 y / (\partial e)^2 < 0$，

$y_{ke} \equiv \partial^2 y / \partial(k+g)\partial e > 0$を仮定する．最後の仮定は，エフォート水準が高い子の方が低い子よりも，教育投資の限界生産性が高いことを意味する．子は所得をすべて消費する（$c_k = Y$）．

親は子に対して利他的であり，すべての子は同一であるという仮定の下で，親の効用関数は次式で与えられる．

(3) $$U^p = u_p(c_p) + \delta(n) n U^k$$

ここで，$\delta(n)$は親が子の効用に置くウェイトであり，$\delta'(n) < 0,\ \delta(n) + n\delta'(n) > 0,$ $u_p'(c_p) > 0,\ u_p''(c_p) < 0$を仮定する．$U^k$は子の効用水準であり，次式で表される．

(4) $$U^k = u_k(c_k) - v(e)$$

ここで，$-v(e)$はエフォートの不効用であり，$v'(e) > 0,\ v''(e) > 0,\ u_k'(c_k) > 0,\ u_k''(c_k) < 0$を仮定する．

政府は，公的教育の提供と私的教育投資に対する補助という 2 つの政策オプションを持っており，その財源を親に対する一括税によって賄う．政府の予算制約は次式で与えられる．

(5) $$T = \bar{n}(g + \rho\bar{k})$$

ここで，$\bar{n}$は親 1 人あたりの子の数であり，$\bar{k}$は子 1 人あたりの私的教育投資である．

親と子の間のゲームのタイミングは次の通りである．①親が子の数を決定する，②子がエフォート水準を決定する．③親が私的教育投資を決定する．④私的教育投資，公的教育投資およびエフォートに依存して子の所得が決まる．

3. 家族の最適解とゲームの均衡解との比較

本節では，政府が公的教育投資を行う場合と私的教育投資への補助を行う場合とに分けて，家族の最適解とゲームの均衡解との比較を行う．とくに，均衡における子の数と教育投資が，最適解との比較において，過少であるか過剰であるかに注目する．

3.1　公的教育投資

ここでは，政府が親からの一括税によって子に対する公的教育投資を行うケースを考える．したがって，親および政府の予算制約は(1)と(5)にそれぞれ$\rho = 0$を代入したものになる．

(1)　ゲームの均衡

第 3 ステージにおける親による子に対する私的教育投資kの決定を考える．親は，nとe

を所与として，自分と子の予算制約の下で，(3)を最大にするようにkを選ぶ．効用最大化の1階条件は次式で与えられる．

(6) $$-u_p'(I-n(k+\beta)-T)+\delta(n)u_k'(\bar{y}+y(k+g,\ e))y_k(k+g,\ e)=0$$

(6)は教育投資の限界費用と限界便益が一致することを意味する．教育投資の費用は教育投資に支出することによる親の消費の減少であり，便益は教育投資による子の所得（＝消費）の増加である．(6)より，次の反応関数が導出される．

(7) $$k=k(e,\ n;\ T,\ g)$$

第2ステージにおける子によるエフォートeの決定を考える．子は，所与のnの下で，次の問題を解く．

$$\operatorname*{Max}_e\ V^k(e,\ n;\ T,\ g)\equiv\operatorname*{Max}_e\ [u_k(\bar{y}+y(k(e,\ n;\ T,\ g)+g,\ e))-v(e)]$$

1階条件は次式で与えられる．

(8) $$u_k'(Y)[y_k(k+g,\ e)k_e+y_e(k+g,\ e)]-v'(e)=0$$

ここで，$k=k(e,\ n;\ T,\ g)$である．(8)は所得の上昇を通じてのエフォートの限界便益とエフォートの限界不効用が一致することを意味する．エフォートは直接的に所得を増加させるだけでなく，教育投資の限界生産性を高めることを通じて間接的にも所得の増加を生む．(8)より，次の反応関数が導出される．

(9) $$e=e(n;\ T,\ g)$$

第3ステージにおける親による子の数nの決定を考える．親は次の問題を解く．

$$\operatorname*{Max}_n\ V^p(n;\ T,\ g)\equiv\operatorname*{Max}_n\ \{u_p(I-n(k+\beta)-T)+\delta(n)[u_k(\bar{y}+y(k+g,\ e))-v(e)]\}$$
$$\text{subject to}\ \ k=k(e(n;\ T,\ g),\ n;\ T,\ g),\ e=e(n;\ T,\ g)$$

1階条件は次式で与えられる．

(10) $$-(k+\beta)u_p'(I-n(k+\beta)-T)+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_k(Y)-v(e)]=0$$

ここで，$k=k(e(n;\ T,\ g),\ n;\ T,\ g),\ e=e(n;\ T,\ g)$である．(10)は，教育投資と養育費のための子を持つことの限界費用と，利他性に基づく子を持つことの限界便益が一致することを意味する．

(6)，(8)，(10)に政府予算制約式と$n=\bar{n}$を代入することにより，このゲームのサブゲーム完全均衡$(k^*,\ e^*,\ n^*)$が導かれる．

(2) 家族の最適解との比較

参照基準である家族の最適解$(k^F,\ e^F,\ n^F)$は，利他的な親が，子の数と私的教育投資に加えて，子のエフォートも選ぶとした場合の解として定義される．それは

(11) $$-u_p'(I-n(k+\beta)-T)+\delta(n)u_k'(\bar{y}+y(k+g,\ e))y_k(k+g,\ e)=0$$

(12) $$u_k'(Y)y_e(k+g,\ e)-v'(e)=0$$

(13) $$-(k+\beta)u_p'(I-n(k+\beta)-T)+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_k(Y)-v(e)]=0$$

に政府予算制約式と$n=\bar{n}$を代入することにより導出される．

次に，ゲームの均衡解$(k^*,\ e^*,\ n^*)$と家族の最適解$(k^F,\ e^F,\ n^F)$との比較を行う．そのために，まず，以下の関数を定義する．(6)に政府予算制約式と$n=\bar{n}$を代入し，それをkについて解いたものを

(14) $$k=\hat{k}(e,\ n;\ g)$$

で表す．ここで，$\hat{k}_e > 0$，$\hat{k}_n < 0$，$\hat{k}_g = -1$である[2]．親は，子のエフォートが増えたとき，教育投資の限界生産性が高まるため，教育投資を増加させる一方，子の数が増えれば，1 人あたりの教育投資を減少させる．また，公的教育投資が増加したとき，同額の私的教育投資が減少する．次に，(8)に(14)を代入した式をeについて解いたものを

(15) $$e = \hat{e}(n;\, g)$$

と定義する．ここで，$\hat{e}_n < 0$，$\hat{e}_g = 0$である[3]．子の数の増加は，1 人あたりの私的教育投資の減少を通じて，エフォートを低下させる．一方，公的教育投資の増加は同額の私的教育投資の減少を招くため，エフォートに対して効果をもたない．

ここで，ゲームの均衡解と家族の最適解におけるeに関する 1 階条件の違いに着目し，以下のような関数を考える．

(16) $$u_k'[\bar{y} + y(k+g,\, e)][y_k(k+g,\, e)\hat{k}_e\theta + y_e(k+g,\, e)] - v'(e) = 0$$

ここで，$\theta \in [0,\, 1]$である．そして，(16)，(10)（もしくは(13)）および(14)から成る方程式体系の解を$(e(\theta),\, n(\theta),\, k(\theta))$と定義する．これは，$\theta = 1$のときには，ゲームの均衡解に一致し，$\theta = 0$のときには，家族の最適解に一致する．すなわち，$e(1) = e^*,\, n(1) = n^*,\, k(1) = k^*$，および，$e(0) = e^F,\, n(0) = n^F,\, k(0) = k^F$となる．この方程式体系の下で，$\theta$の変化に関する比較静学分析を行うと，次の結果を得る[4]．

$$\frac{dn}{d\theta} < 0,\ \frac{de}{d\theta} > 0,\ \frac{dk}{d\theta} > 0$$

これより，以下の命題が導かれる．

命題 1：$n^* < n^F$，$e^* > e^F$，$k^* > k^F$

ある一定のnの下で，ゲームの均衡解の方が家族の最適解に比べて，子のエフォートは大きい．これは，親からより多くの教育投資を引き出そうとする子の戦略的行動による．その結果，ゲームの均衡解の方が家族の最適解に比べて，教育投資が大きくなるため，子をもつことの限界費用（(10)の第 1 項に政府予算制約式と$n = \bar{n}$を代入したもの）も大きくなる．一方で，ゲームの均衡においては，nを与件として子が自らの効用を最大化するようにエフォートを選ぶのに対し，家族の最適解においては親が子のエフォートを選ぶため，ある一定のnの下では，前者において子の効用はより高い．したがって，ゲームの均衡解の方が家族の最適解に比べて，子をもつことの限界便益（(10)の第 2 項）も大きくなる．しかし，

[2] 補論参照.
[3] 補論参照
[4] 補論参照.

補論で示されているように，ゲームの均衡解と家族の最適解における限界費用の差は限界便益の差を上回り，子をもつことの限界純便益はゲームの均衡解の方が小さくなる．したがって，家族の最適解に比べてゲームの均衡解における子の数は過少になる．

3.2　私的教育投資に対する補助

ここでは，政府が親からの一括税によって私的教育投資への補助を行うケースを考える．したがって，政府の予算制約は(5)に $g=0$ を代入したものになる．

(1)　ゲームの均衡

第 3 ステージにおける親による子に対する私的教育投資 k の決定を考える．効用最大化の 1 階条件は次式で与えられる．

(17)　$$-(1-\rho)u_p'(I-n[(1-\rho)k+\beta)-T]+\delta(n)u_k'(\bar{y}+y(k,\ e))y_k(k,\ e)=0$$

補助金の存在により，教育投資の限界費用は親の自己負担分に対応するものとなる．(17)より，次の反応関数が導出される．

(18)　$$k=k(e,\ n;\ T,\ \rho)$$

第 2 ステージにおける子によるエフォート e の決定を考える．子は，所与の n の下で，次の問題を解く．

$$\operatorname*{Max}_{e}\ V^k(e,\ n;\ T,\ \rho)\equiv\operatorname*{Max}_{e}\ [u_k(\bar{y}+y(k(e,\ n;\ T,\ \rho),\ e))-v(e)]$$

1 階条件は次式で与えられる．

(19)　$$u_k'(Y)[y_k(k,\ e)k_e+y_e(k,\ e)]-v'(e)=0$$

ここで，$k=k(e,\ n;\ T,\ \rho)$ である．(8)より，次の反応関数が導出される．

(20)　$$e=e(n;\ T,\ \rho)$$

第 3 ステージにおける親による子の数 n の決定を考える．親は次の問題を解く．

$$\operatorname*{Max}_{n}\ V^p(n;\ T,\ \rho)\equiv\operatorname*{Max}_{n}\ \{u_p(I-n[(1-\rho)k+\beta]-T)+\delta(n)[u_k(\bar{y}+y(k,\ e))-v(e)]\}$$

subject to $k=k(e(n;\ T,\ \rho),\ n;\ T,\ \rho),\ e=e(n;\ T,\ \rho)$

1 階条件は次式で与えられる．

(21)　$$-[(1-\rho)k+\beta]u_p'(I-n[(1-\rho)k+\beta]-T)+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_k(Y)-v(e)]=0$$

ここで，$k=k(e(n;\ T,\ \rho),\ n;\ T,\ \rho),\ e=e(n;\ T,\ \rho)$ である．

(17)，(19)，(21)に政府予算制約式，$n=\bar{n}$ と $k=\bar{k}$ を代入することにより，このゲームのサブゲーム完全均衡 $(k^*,\ e^*,\ n^*)$ が導かれる．

(2) 家族の最適解との比較

参照基準である家族の最適解 $(k^F,\ e^F,\ n^F)$ は，利他的な親が，子の数と私的教育投資に加えて，子のエフォートも選ぶとした場合の解として定義される．それは

(22)　$$-(1-\rho)u_p'(I-n[(1-\rho)k+\beta)-T]+\delta(n)u_k'(\bar{y}+y(k,\ e))y_k(k,\ e)=0$$

(23)　$$u_k'(Y)y_e(k,\ e)-v'(e)=0$$

(24)　$$-[(1-\rho)k+\beta]u_p'(I-n[(1-\rho)k+\beta]-T)+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_k(Y)-v(e)]=0$$

に政府予算制約式，$n=\bar{n}$ と $k=\bar{k}$ を代入することにより導出される．

ここで，以下の関数を定義する．(17)に政府予算制約式，$n=\bar{n}$ と $k=\bar{k}$ を代入し，それ

をkについて解いたものを

(25) $$k = \hat{k}(e,\ n;\ \rho)$$

で表す．ここで，$\hat{k}_e > 0$，$\hat{k}_n < 0$，$\hat{k}_\rho > 0$である[5]．次に，(19)に(25)を代入した式を

eについて解いたものを

(26) $$e = \hat{e}(n;\ \rho)$$

で表す．ここで，$\hat{e}_n < 0$，$\hat{e}_\rho > 0$である[6]．私的教育投資への補助の増加は，私的教育投資の増加を通じて，エフォートの限界生産性を高める．よってエフォートは増加する．

ゲームの均衡解$(k^*,\ e^*,\ n^*)$と家族の最適解$(k^F,\ e^F,\ n^F)$との比較に関しては，私的教育投資への補助のケースにおいても，命題1と同様の結果が導かれる．すなわち，$n^* < n^F$，$k^* > k^F$および$e^* > e^F$が成立する．

4．教育政策の効果

前節では，子の数，私的教育投資およびエフォートに関して，ゲームの均衡解が家族の最適解とは一致しないことが示された．本節では，公的教育の提供あるいは私的教育投資への補助といった教育政策がゲームの均衡解に及ぼす効果を分析し，教育投資によって家族の厚生が高まるか否かを検討する．

4.1　公的教育投資

(10)に政府予算制約式と$n = \overline{n}$を代入した式をnとgで微分し，$\hat{k}_g = -1$，$\hat{e}_g = 0$を考慮することにより，次式を得る[7]．

$$\frac{dn}{dg} = -\frac{u_p'}{V_{nn}^p} > 0$$

ここで，$V_{nn}^p = (k+\beta)(k+\beta+g)u_p'' + [2\delta'(n) + n\delta''(n)][u_k - v(e)] < 0$である．すなわち，公的教育投資の増加により子の数は増加する．これは，公的教育投資が増加すれば，親はその分私的教育投資を減らすことができるため，子を持つことの限界費用が低下することによる．

次に，(15)をnとgで微分することにより，次式を得る．

$$\frac{de}{dg} = \hat{e}_n \frac{dn}{dg} < 0 \qquad (\because \hat{e}_n < 0)$$

[5] 補論参照．
[6] 補論参照．
[7] 導出過程は補論を参照．

すなわち，公的教育投資の増加によりエフォートは減少する．これは，公的教育投資の増加による子の数の増加が私的教育投資を減少させることを通じて，エフォートの限界生産性を低下させることによる．

さらに，(14)をe，n，gで微分することにより，次式を得る．

$$\frac{dk}{dg}=\hat{k}_e\frac{de}{dg}+\hat{k}_n\frac{dn}{dg}+\hat{k}_g<0 \qquad (\because \hat{k}_e>0,\ \hat{k}_n<0,\ \hat{k}_g=-1)$$

すなわち，公的教育投資の増加により私的教育投資は減少する．結果として生じる教育投資の総額の変化は次式で与えられる．

$$\frac{d(k+g)}{dg}=\hat{k}_e\frac{de}{dg}+\hat{k}_n\frac{dn}{dg}<0$$

子の数の増加とエフォートの減少を通じた効果により，私的教育投資の減少は公的教育投資の増加よりも大きい．その結果，公的教育投資が増加するとき，教育投資の総額はむしろ減少する．

以上の議論より，次の命題を得る．

命題 2： $dn/dg>0$，　$de/dg<0$，$d(k+g)/dg<0$

命題 1 および命題 2 より，次の命題を得る．

命題 3： 公的教育投資の増加は家族の厚生を改善する

すなわち，家族の最適解との比較において，子の数の過小性，教育投資の過剰性，および，エフォートの過剰性が同時に発生しているが，公的教育投資はこれらの歪みをすべて是正する方向に作用し，その増加に伴い家族の厚生は改善される．

4.2　私的教育投資に対する補助

(10)に政府予算制約式，$n=\overline{n},\ k=\overline{k}$ を代入した式をnとρで微分することにより，次式を得る．

$$\frac{dn}{d\rho}=-\frac{V_{n\rho}^p}{V_{nn}^p}$$

ここで，

$$V_{n\rho}^p=[k-(1-\rho)k_e e_\rho]u_p'+n[(1-\rho)k+\beta](k_e e_\rho+k_\rho)u_p''+n\delta' y_k k_\rho u_k'$$

$$V_{nn}^p=[(1-\rho)k+\beta](k+\beta)u_p''+[2\delta'(n)+n\delta''(n)][u_k-v(e)]<0$$

である．$V_{n\rho}^p$の第 2 項と第 3 項は負であるが，第 1 項の符号は不定である．なぜなら，当初

の k の下で ρ の増加は親の教育費負担を軽減するため子の限界費用を低下させる一方，ρ の増加によるエフォートの増加を通じて教育投資が増加し，これは子の限界費用を上昇させる方向に働くためである．したがって，$dn/d\rho$ の符号も一般的には定まらない．

次に，(26)を n, ρ で微分すると以下の式が得られる。

$$\frac{de}{d\rho}=\hat{e}_n\frac{dn}{d\rho}+\hat{e}_\rho$$

$\hat{e}_n<0,\ \hat{e}_\rho>0$ より、以下の関係が成立する。

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{d\rho}<0\rightarrow\dfrac{de}{d\rho}>0 \\ \dfrac{dn}{d\rho}>0\rightarrow\dfrac{de}{d\rho}>\text{or}<0 \end{cases}$$

すなわち，ρ の増加によって子の数が減少するならば，エフォートは増加する．これは，ρ の増加がエフォートを増加させる直接的効果をもつのに加えて，子の数の減少による私的教育投資の増加を通じても，エフォートは増加する．一方，ρ の増加によって子の数が増加するならば，それによる教育投資の減少がエフォートを減少させ，直接効果と逆の方向に働くため，エフォートの増減は不定となる．

(25)を e, n, ρ で微分すると以下の式が得られる。

$$\frac{dk}{d\rho}=\hat{k}_e\hat{e}_\rho+\hat{k}_\rho+(\hat{k}_e\hat{e}_n+\hat{k}_n)\frac{dn}{d\rho} \tag{27}$$

$\hat{e}_n<0,\ \hat{e}_\rho>0\ \hat{k}_e>0,\ \hat{k}_n<0,\ \hat{k}_\rho>0$ より、以下の関係が成立する。

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{d\rho}<0\rightarrow\dfrac{dk}{d\rho}>0 \\ \dfrac{dn}{d\rho}>0\rightarrow\dfrac{dk}{d\rho}>\text{or}<0 \end{cases}$$

ρ の増加は教育投資を増加させる直接効果をもつのに加えて，子の数の変化を通じても教育投資に影響を与える．子の数が減少するならば，それによっても教育投資は増加するため，総効果として教育投資は増加する．一方，子の数が増加するならば，それは教育投資を減らす効果をもつため，総効果の正負は不定となる．

以上の議論は，公的教育投資とは異なり，私的教育投資への補助が家族の厚生を改善しない可能性を示唆している．私的教育投資への補助によって子の数が減少する場合には，教育投資およびエフォートは増加するため，子の数の過少性と教育・エフォートの過剰性は増幅し，家族厚生は低下する．一方で，私的教育投資への補助によって子の数が増加する場合でも，教育投資およびエフォートの変化の方向が定まらないため，家族厚生が高まるとは限らない．

5. むすび

本論文では，わが国をはじめ他国でも見られる少子化（子の数の過少性）と教育投資の過剰性という現象に理論的根拠を与えることを試みた．さらに，そのような非効率性を解消し家族厚生を高めるための公的教育政策に関して検討を行った．それによれば，公的教育投資の拡大（例えば，初中等段階における公教育の充実）は子の数の過少性と教育投資の過剰性を緩和し，パレート改善を導く．それに対し，私的教育投資への補助金（例えば，補助教育や大学教育の授業料への援助）については，確定的な結果は得られないものの，子の数の過少性と教育投資の過剰性を強める可能性が存在する．

今後の課題として，以下の点が挙げられる．第 1 に，子の数の過少や教育投資の過剰を判断するための参照基準として，社会的最適解を採用することである．本研究における親と子のゲームの均衡解と家族の最適解とを比較するというアプローチは，Rotten Kid Theorem (Becker, 1974)以来，家族の経済学分野においてはきわめて一般的であり，利己的な子の戦略的な行動によって家族内に非効率性が生じるか否かが論点となってきた．しかし，少子化は社会的現象であり，家族にとって最適な子の数であったとしても，社会的最適解に比べれば過少であるという状況も十分に考えられる．したがって，社会的厚生の見地から子の数や子に対する教育の最適性を検討することも必要であろう．第 2 に，初中等教育と高等教育のステージを明示的に分けて，各ステージにおける 2 種類の子のエフォートを考慮するなど，より現実を反映したモデルに拡張することである．それにより，初中等教育と高等教育においてそれぞれどのような公的政策を実施することが望ましいのかを，より詳細に検討することが可能になると考えられる．

補論

(1) 政府が公的教育投資 g を行うケース

k の反応関数の傾き

(6)に政府の予算制約式と $n=\overline{n}$ を代入して，$k,\ e,\ n,\ g$ で微分すると，

$$U_{kk}^{p}dk+U_{ke}^{p}de+U_{kn}^{p}dn+U_{kg}^{p}dg=0 \tag{A1}$$

が得られる．ここで，U_{kk}^{p}, U_{ke}^{p}, U_{kn}^{p}, U_{kg}^{p} は以下の通りとなる．

$$U_{kk}^{p}\left(\equiv\frac{\partial^{2}U^{p}}{(\partial k)^{2}}\right)=nu_{p}''+\delta(n)[u_{k}''(y_{k})^{2}+u_{k}'y_{kk})<0 \tag{A2}$$

$$U_{ke}^{p}\left(\equiv\frac{\partial^{2}U^{p}}{\partial k\partial e}\right)=\delta(n)(u_{k}''y_{e}y_{k}+u_{k}'y_{ke}) \tag{A3}$$

$$U_{kn}^{p}\left(\equiv\frac{\partial^{2}U^{p}}{\partial k\partial n}\right)=(k+\beta+g)u_{p}''+\delta'(n)u_{k}'y_{k}<0 \tag{A4}$$

$$U_{kg}^{p}\left(\equiv\frac{\partial^{2}U^{p}}{\partial k\partial g}\right)=nu_{p}''+\delta(n)[u_{k}''(y_{k})^{2}+u_{k}'y_{kk})=U_{kk}^{p}<0 \tag{A5}$$

(A3)の符号は一般的には確定しないが，もし $y(k+g,\ e)$ をコブ・ダグラス関数と仮定し，$u_{k}(\cdot)$ を対数関数と仮定するならば正となる[8]．ここでは，$U_{ke}^{p}>0$ を仮定する．

(A1)-(A5)より，k の $e,\ n,\ g$ に対する反応関数の傾きが得られる．

$$\hat{k}_{e}=-\frac{U_{ke}^{p}}{U_{kk}^{p}}>0$$

---

[8] $y(k+g,\ e)=(k+g)^{\alpha}e^{1-\alpha}$，$u_{k}(C_{k})=\ln C_{k}$ とすると，

$$\begin{aligned}U_{ke}^{p}&=\delta(n)[u_{k}''y_{e}y_{k}+u_{k}'y_{ke}]\\&=\delta(n)\left\{\frac{-1}{C_{k}^{2}}[\alpha(1-\alpha)(k+g)^{2\alpha-1}e^{1-2\alpha}]+\frac{1}{C_{k}}[\alpha(1-\alpha)(k+g)^{\alpha-1}e^{-\alpha}]\right\}\\&=\frac{\delta(n)\alpha(1-\alpha)(k+g)^{\alpha-1}e^{-\alpha}}{C_{k}^{2}}\left[C_{k}-(k+g)^{\alpha}e^{1-\alpha}\right]\end{aligned}$$

子の予算制約式 $\overline{y}>0$ より $C_{k}>(k+g)^{\alpha}e^{1-\alpha}$ が成立するので，$U_{ke}^{p}>0$ が成り立つ．

$$\hat{k}_n = -\frac{U_{kn}^p}{U_{kk}^p} < 0$$

$$\hat{k}_g = -\frac{U_{kg}^p}{U_{kk}^p} = -1$$

eの反応関数の傾き

(8)をe, n, gで微分すると，

(A6) $$V_{ee}^k de + V_{en}^k dn + V_{eg}^k dg = 0$$

ここで，V_{ee}^k, V_{en}^k, V_{eg}^kは以下の通りとなる．

(A7) $$V_{ee}^k \left(\equiv \frac{\partial^2 V}{(\partial e)^2} \right) = u_k'' \cdot (y_k \hat{k}_e + y_e)^2 + u_k' \cdot [y_{kk}(\hat{k}_e)^2 + 2y_{ke}\hat{k}_e + y_{ee}] - v''(e) < 0$$

(A8) $$V_{en}^k \left(\equiv \frac{\partial^2 V}{\partial e \partial n} \right) = \hat{k}_n [u_k'' y_k (y_k \hat{k}_e + y_e) + u_k' (y_{kk}\hat{k}_e + y_{ek})] = \frac{-nu_p'' \hat{k}_n \hat{k}_e}{\delta(n)} < 0$$

(A9) $$V_{eg}^k \left(\equiv \frac{\partial^2 V}{\partial e \partial g} \right) = u_k'' y_k (\hat{k}_g + 1)(y_k \hat{k}_e + y_e) + u_k' \cdot [y_{kk}(\hat{k}_g + 1)\hat{k}_e + y_{ek}(\hat{k}_g + 1)] = 0 \quad (\because \hat{k}_g = -1)$$

(A8) の 符 号 は ， $u_k''(y_k)^2 + u_k' y_{kk} = (U_{kk}^p - nu_p'')/\delta(n)$, $u_k'' y_k y_e + u_k' y_{ek} = U_{ke}^p/\delta(n)$,

$\hat{k}_e > 0$, $\hat{k}_n < 0$ に注意すると，

$$V_{en}^k = \hat{k}_n [u_k''(y_k)^2 + u_k' y_{kk})\hat{k}_e + (u_k'' y_k y_e + u_k' y_{ek})] = \frac{\hat{k}_n}{\delta(n)}[(U_{kk}^p - nu_p'')(\frac{-U_{ke}^p}{U_{kk}^p}) + U_{ke}^p]$$

$$= \frac{-nu_p'' \hat{k}_n \hat{k}_e}{\delta(n)} < 0$$

より得られる．

(A6)-(A9)より，eのn, gに対する反応関数の傾きが得られる．

$$\hat{e}_n = \frac{-V_{en}^k}{V_{ee}^k} < 0$$

$$\hat{e}_g = \frac{-V_{eg}^k}{V_{ee}^k} = 0$$

(2) 政府が私的教育投資に補助金 ρ を提供するケース

k の反応関数の傾き

(17)に政府の予算制約式と $n=\overline{n},\ k=\overline{k}$ を代入して，$k,\ e,\ n,\ \rho$ で微分すると，

(A10)
$$U^p_{kk}dk+U^p_{ke}de+U^p_{kn}dn+U^p_{k\rho}d\rho=0$$

が得られる．ここで，$U^p_{kk},\ U^p_{ke},\ U^p_{kn},\ U^p_{k\rho}$ は以下の通りとなる．

(A11)
$$U^p_{kk}=n(1-\rho)u''_p+\delta(n)[u''_k(y_k)^2+u'_k y_{kk})<0$$

(A12)
$$U^p_{ke}=\delta(n)(u''_k y_e y_k+u'_k y_{ke})$$

(A13)
$$U^p_{kn}=(1-\rho)(k+\beta)u''_p+\delta'(n)u'_k y_k<0$$

(A14)
$$U^p_{k\rho}=u'_p>0$$

(A12)の符号は一般的には確定しないが，$y(k+g,\ e)$ をコブ・ダグラス関数と仮定し，$u_k(\cdot)$ を対数関数と仮定するならば正となる．ここでは，$U^p_{ke}>0$ を仮定する．

(A10)-(A14)より，k の $e,\ n,\ \rho$ に対する反応関数の傾きが得られる．

$$\hat{k}_e=-\frac{U^p_{ke}}{U^p_{kk}}>0$$
$$\hat{k}_n=-\frac{U^p_{kn}}{U^p_{kk}}<0$$
$$\hat{k}_\rho=-\frac{U^p_{k\rho}}{U^p_{kk}}>0$$

e の反応関数の傾き

(19)に(25)を代入した式を $e,\ n,\ \rho$ で微分することにより、以下の式が得られる。

(A15)
$$V^k_{ee}de+V^k_{en}dn+V^k_{e\rho}d\rho=0$$

ここで，$V^k_{ee},\ V^k_{en},\ V^k_{e\rho}$ は以下の通りとなる．

(A16) $$V_{ee}^{k}=u_k''\cdot(y_k\hat{k}_e+y_e)^2+u_k'\cdot[y_{kk}(k_e)^2+2y_{ke}\hat{k}_e+y_{ee}]-v''(e)<0$$

(A17) $$V_{en}^{k}=\hat{k}_n[u_k''y_k(y_k\hat{k}_e+y_e)+u_k'(y_{kk}\hat{k}_e+y_{ek})]=\frac{-n(1-\rho)^2u_p''\hat{k}_n\hat{k}_e}{\delta(n)}<0$$

(A18) $$V_{e\rho}^{k}=\hat{k}_\rho[u_k''y_k(y_k\hat{k}_e+y_e)+u_k'(y_{kk}\hat{k}_e+y_{ek})]=\frac{-n(1-\rho)^2u_p''\hat{k}_\rho\hat{k}_e}{\delta(n)}>0$$

(A17)の符号は，$u_k''(y_k)^2+u_k'y_{kk}=(U_{kk}^{p}-n(1-\rho)^2u_p'')/\delta(n),\ u_k''y_ky_e+u_k'y_{ek}=U_{ke}^{p}/\delta(n),$

$\hat{k}_e>0,\ \hat{k}_n<0$ に注意すると，

$$\begin{aligned}V_{en}^{k}&=\hat{k}_n[(u_k''(y_k)^2+u_k'y_{kk})\hat{k}_e+(u_k''y_ky_e+u_k'y_{ek})]\\&=\frac{\hat{k}_n}{\delta(n)}[(U_{kk}^{p}-n(1-\rho)^2u_p'')(\frac{-U_{ke}^{p}}{U_{kk}^{p}})+U_{ke}^{p}]=\frac{-n(1-\rho)^2u_p''\hat{k}_n\hat{k}_e}{\delta(n)}<0\end{aligned}$$

より得られる．同様に(A18)も成立する．

(A15)-(A18)より，e の $n,\ \rho$ に対する反応関数の傾きが得られる．

$$\hat{e}_n=\frac{-V_{en}^{k}}{V_{ee}^{k}}<0$$

$$\hat{e}_\rho=\frac{-V_{e\rho}^{k}}{V_{ee}^{k}}>0$$

(3) $dn/d\theta,\ de/d\theta,\ dk/d\theta$ の導出

(16)と(10)にそれぞれ(14)をを代入した式に $e,\ n,\ \theta$ で微分すると，以下のようになる．

(A19) $$\begin{bmatrix}V_{ee}^{k}(\theta) & V_{en}^{k}(\theta)\\ V_{ne}^{p}(\theta) & V_{nn}^{p}(\theta)ne\end{bmatrix}\begin{bmatrix}de\\ dn\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-u_k'y_k\hat{k}_e\\ 0\end{bmatrix}d\theta$$

ここで，

$$V_{ee}^{k}(\theta)=u_k''\cdot(y_k\hat{k}_e+y_e)^2+u_k'\cdot[(y_{kk}\hat{k}_e+y_{ke})\hat{k}_e\theta+y_{ek}\hat{k}_e+y_{ee}]-v''(e)$$

$$V_{en}^{k}(\theta)=\hat{k}_n[u_k''y_k(y_k\hat{k}_e+y_e)+u_k'(y_{kk}\hat{k}_e\theta+y_{ek})]$$

(A20) $$V_{ne}^{p}(\theta)=-\hat{k}_eu_p'+n(k+\beta)\hat{k}_eu_p''+[\delta(n)+n\delta'(n)][u_k'\cdot(y_k\hat{k}_e+y_e)-v'(e)]$$

$$V_{nn}^{p}(\theta) = -\hat{k}_n u_p' + (k+\beta)(k+\beta+g-n\hat{k}_n)u_p'' + [2\delta'(n)+n\delta''(n)][u_k(Y)-v(e)]$$
$$+[\delta(n)+n\delta'(n)]u_k' y_k \hat{k}_n$$

である．(16)より $u_k' y_e - v'(e) = -u_k' y_k \hat{k}_e \theta$ が成立するが，これを(A20)に代入し，(6)および

$\hat{k}_e > 0$ に注意することにより，以下の符号が成立する．

$$V_{ne}^{p}(\theta) = \left\{-u_p' + n(k+\beta)u_p'' + [\delta(n)+n\delta'(n)][u_k' y_k(1-\theta)]\right\}\hat{k}_e$$
$$= \left\{[-u_p' + \delta(n)u_k' y_k] + n(k+\beta)u_p'' + n\delta'(n)u_k' y_k - [\delta(n)+n\delta'(n)]\theta\right\}\hat{k}_e < 0$$

また，$V_{ee}^{k}(\theta)$ および $V_{nn}^{p}(\theta)$ の符号は，$\theta=0,\ \theta=1$ のときの２階の条件およびその θ による

線形結合より，$V_{ee}^{k}(\theta)<0$，$V_{nn}^{p}(\theta)<0$ が成立する．また同様に，$\theta=0,\ \theta=1$ のときの２階

の条件およびその θ による線形結合より，

$$D(\theta) \equiv V_{ee}^{k}(\theta)V_{nn}^{p}(\theta) - V_{en}^{k}(\theta)V_{ne}^{p}(\theta) > 0$$

が成立する．

(A19)とクラメールの公式および $V_{nn}^{p}(\theta)<0$，$V_{ne}^{p}(\theta)<0$，$D(\theta)>0$，$\hat{k}_e>0$ より，

(A21) $$\frac{de}{d\theta} = \frac{-u_k' y_k \hat{k}_e}{D(\theta)} V_{nn}^{p}(\theta) > 0$$

(A22) $$\frac{dn}{d\theta} = \frac{u_k' y_k \hat{k}_e}{D(\theta)} V_{ne}^{p}(\theta) < 0$$

が成立する．また，$k(\theta) = \hat{k}(e(\theta),\ n(\theta))$ を θ で微分すると，以下の式が成立する．

(A23) $$\frac{dk}{d\theta} = \hat{k}_e \frac{de}{d\theta} + \hat{k}_n \frac{dn}{d\theta} > 0$$

(4) 公的教育投資 g の n に対する効果

$\hat{k}_g = -1,\ \hat{e}_g = 0$ より，

(A24) $$V_{ng}^{p} = -(\hat{k}_e\hat{e}_g + \hat{k}_g)u_p' + n(k+\beta)[n(\hat{k}_e\hat{e}_g + \hat{k}_g) + n)]u_p''$$
$$+[\delta(n)+n\delta'(n)]u_k' \cdot [y_k(\hat{k}_e\hat{e}_g + \hat{k}_g + 1) + y_e\hat{e}_g] - v'(e)\hat{e}_g = -\hat{k}_g u_p' = u_p'$$

となる．したがって，

$$\frac{dn}{dg} = -\frac{V_{ng}^{p}}{V_{nn}^{p}} = -\frac{u_p'}{V_{nn}^{p}} > 0$$

が得られる．

引用文献

Barham, V., Boadway, R., Marchand, M., 1995. Education and the poverty trap. European Economic Review 39, 1257-1275.

Becker, G., 1974. A theory of social interactions. Journal of Political Economy 82, 1063-1093.

Blankenau, W., Camera, G., 2009. Public spending on education and the incentives for student achievement. Economica 76, 505-527.

Borck, R., 2011. Federalism, fertility, and growth. Scandinavian Journal of Economics 113, 30-54.

Buchanan, J., 1975. The Samaritan's dilemma. In: Phelps E. (Ed.), Altruism, Morality and Economic Theory. Russell Sage Foundation, New York, pp. 71-85.

Bray, M., Kwok, P., 2003. Demand for private supplementary tutoring: conceptual considerations, and socio-economic patterns in Hong Kong. Economics of Education Review 22, 611-620.

Cremer, H., Kessler, D., Pestieau, P., 1992. Intergenerational transfers within the family. European Economic Review 36, 1-16.

De Fraja, G., 2002. The design of optimal education polices. Review of Economic Studies 69, 437-466.

Ihori, T., Kamada, K., Sato, T., 2008. Altruism, liquidity constraint, and educational investment. Discussion Paper 0803, Institute of Economics, Chukyo University.

Tansel, A., Bircan, F., 2006. Demand for education in Turkey: a tobit analysis of private tutoring expenditures. Economics of Education Review 25, 303-313.

Zhang, J., 1997. Fertility, growth, and public investments in children. Canadian Journal of Economics 30, 835-843.

Zhang, J., 2003. Optimal debt, endogenous fertility, and human capital externalities in a model with altruistic bequests. Journal of Public Economics 87, 1825-1835.