中京大学経済学論叢
31号
2020年３月

線形技術のソローモデル:
学部学生に経済成長論を教える一つの方法§

古川　雄一　中京大学経済学部*

要旨

本ノートの目的は，学部で経済成長論を教える方法の一つとして、資本と労働が完全代替的な生産要素であるような，線形生産関数に基づくソローモデルの特殊ケースを解説することにある．移行動学および長期均衡の性質が，標準的なソローモデルの結果と同じであることを，生産要素成長率の比較のみに基づくグラフィカルな分析によって説明する．

1. はじめに

経済成長はマクロ経済学における重要トピックの１つである．その重要性に言及する経済学者は多いが，例えば, Lucas (1988) は，経済成長に関連した問題をひとたび考え始めると，他のことを考えるのは難しくなると述べ，その重要性と面白さを強調している．また Acemoglu (2013) も，いくつかの理由をあげながら，学部レベルの経済学教育において，経済成長と経済発展により多くの時間が割かれるべきであると主張している．

　では，わが国の現状，大学における経済学教育の中で，経済成長はどのように扱われているだろうか．一般に，学部学生は，ソローモデル (Solow 1956) から経済成長論を学び始め

---

§ 本稿は，筆者が 2008 年より中京大学経済学部において行ってきた，マクロ経済学入門，マクロ経済学および経済成長論の講義内容に基づくものです．多くの学生から得た（得つつある）さまざまな価値あるフィードバックをもとに，本稿の内容は形成されています．また中京大学経済学部の同僚の先生方からは，示唆に富んだご助言をたくさん頂いてきました．特に，斎藤佑樹先生と鈴木崇児先生には，原稿を丁寧に読んで頂き，多くの詳細かつ有益なコメントを頂戴しました．皆様に心から感謝の意を表します。

*メールアドレス: you.furukawa@gmail.com

ることが多いようである．ソローモデルは比較的シンプルな数学的構造をもちつつも，そこから導き出される洞察は現実的観点から興味深いものであることが，理由の 1 つであろう．

離散時間を想定すれば，ソローモデルを理解する上で必要な数学的知識は，比較的シンプルで初歩的なものに限定されると，一応はいうことができる．少なくとも，最適化の知識なしで学習可能である点をみれば，ラムゼーモデル (Ramsey 1928) や，一連のいわゆる内生的成長モデルと比べて，学習へのハードルは低いといってもよい．しかしながら，一般形の関数を取り扱うスキル，少なくとも指数・累乗の計算に関する予備知識を持たない学生にしてみれば，ソローモデルのコアである新古典派生産関数を理解することは容易ではない．また，(一人あたり資本に関する) 位相図による分析を困難に感じる学生も少なくない．筆者の経験によれば，ソローモデルの学習に困難を感じる学生は，年々増加しているようにも思われる．

このノートの目的は，経済成長モデルを，そのエッセンスを失うことなしに，平易な方法で学生に理解させることができるような，ソローモデルのシンプルなバージョンを解説することにある．具体的には，資本と労働が完全代替的な状況を想定した，線形技術に基づくソローモデルを考え,[1] 移行動学および長期均衡の性質が標準的なソローモデルの結果と本質的に変わらないことを，生産要素成長率のグラフィカルな比較によって説明する．加えて，発展的内容への足掛かりとして，シンプルな方法による内生的技術進歩への拡張分析についても書き添える．

関連する文献として Chu (2018) がある. Chu (2018) は，標準的なソローモデルを理解している学部学生に対して，内生的技術進歩をともなうローマーモデル (Romer 1990) を解説するステップ・バイ・ステップな方法を提案している．本ノートは, Chu (2018) が前提とした標準的なソローモデルを理解するための，もう一歩手前のステッピング・ストーンを検討しているという点において, Chu (2018) を補完するものであるといえるだろう．

2. 線形生産関数に基づくソローモデル

本章は，資本と労働が完全代替的な生産要素であるような,ソローモデルのバージョンを提示する．時間インデックスを t の添字で表し，t は 0 から無限にむかって，離散的に拡大していく．

[1] このような状況は，オートメーションや AI に関する経済成長モデルの文脈でしばしば仮定される．最新の成長論研究として, Acemoglu and Restrepo (2018) を挙げておく．

まず, 次のような規模に関して収穫一定の線形技術の生産関数を仮定する:[2]

(1) $Y_t = \alpha\, K_t + (1-\alpha)\, A_t L_t,$

ここで, $\alpha \in [0,1]$ は資本集約度, K_t は資本ストック, A_t は労働生産性 (技術水準), L_t は労働人口を表すとする. 外生的な貯蓄率を $s \in (0,1)$ とすれば, 経済全体の総貯蓄 $S_t = sY_t$ で与えられる. 閉鎖経済においては貯蓄と投資は常に等しくなるので, 投資関数

(2) $I_t = sY_t$

を得る. 資本ストックの増加分（inflow）は投資, 減少分（outflow）は資本減耗である. 資本減耗率を $\delta \in [0,1]$ とすれば, 資本蓄積プロセスは,

(3) $K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t$

で表される. 労働人口の外生的な成長率を $n \geq 0$, 労働生産性のそれ(技術進歩率)を $g \geq 0$ とすれば,

(4) $\frac{L_{t+1}-L_t}{L_t} = n$ and $\frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = g$

を得る。分析の都合上, (1) と (2) を (3) に代入することによって, 資本蓄積プロセス (3) を成長率の形に書き直しておくと便利である:

(5) $g_t^K \equiv \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t} = s(1-\alpha)\frac{A_t L_t}{K_t} + \alpha s - \delta.$

3. 技術進歩なしの長期均衡

学部学生に教えることを念頭に、本章ではまず, 技術進歩が存在しない経済を考える;

[2] このような生産関数を使った成長モデルについては, 注 1 を見よ.

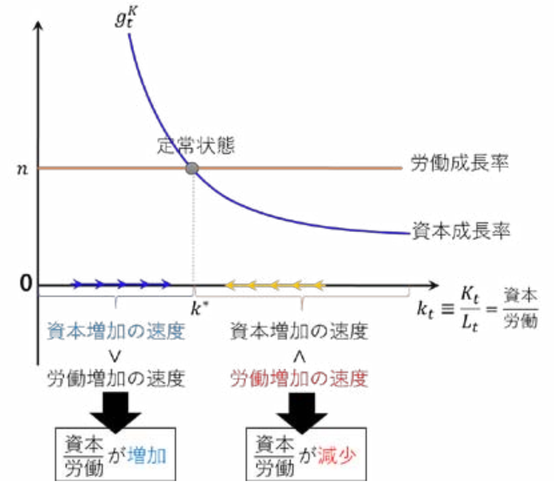

図１: 資本成長率と労働成長率を比較する

$g = 0$ および, すべての $t \geq 0$ について $A_t = 1$ と置く. 一人当たり資本を $k_t \equiv K_t/L_t$ とすれば, 資本成長率は,

(5a) $g_t^K \equiv \frac{K_{t+1}-K_t}{K_t} = \frac{s(1-\alpha)}{k_t} + \alpha s - \delta.$

図１は, 横軸に一人当たり資本を測りつつ, 縦軸で (5a) の資本成長率 g_t^K（青い曲線）と (4) の労働成長率 n（オレンジの水平線）を描いたもので, 成長率の大小関係を比較している.[3] 図１がしめしているように, $k_t < k^*$ の領域では資本成長率の方が労働成長率より速く, 結果, 資本・労働の間の比率である一人当たり資本 $k_t \equiv K_t/L_t$ は時間とともに上昇する. 逆に, $k_t < k^*$ の領域では労働が増えるスピードの方が速いので, $k_t \equiv K_t/L_t$ は時間とともに減少する. したがって, 標準的なソローモデルと同じく, (i) ただ一つの大域安定的な定常状態, k^*, が存在することがわかる. また, 定常状態においては, (ii) 資本成長率と労働成長率 n が等しくなっている. ここで, (1) および $g_t^K = n$ を使って,[4] 定常状態に到達した経

[3] 資本成長率が右下がりになっているのは, 資本の平均生産性が逓減していることからくる. また,定常状態を保証するための条件として, $n + \delta > \alpha s$ を仮定している.

[4] (4), (5a), および $g_t^K = n$ より, 定常状態における一人当たり資本の表現を容易に導出することができ

済における経済成長率は，人口成長率 n に等しくなることをしめすことは難しくいない.[5] ソローモデルの重要な性質の 1 つである (iii) 収束の原理も働いている．なお，これらの結果は，一般的なソローモデルの帰結と同じものである.

学部学生に教えることを念頭におくと，線形技術を仮定したソローモデルの利点として，まず，**求められる数学的知識が極めて初歩的なもの (1 次関数) に限定**されている点があげられる．また，通常の位相図を使った分析よりも，平易かつ直観的で，しかし数学的にも厳密な方法で長期均衡の性質を示している．より標準的なソローモデルの分析では，労働成長率 (4)と資本成長率 (5a) をまとめて，一人当たり資本の成長率を計算した上で，定常状態の一意性，存在，安定性を明らかにしていた．その際，

$$k_{t+1} \equiv \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(1+g_t^K)K_t}{(1+n)L_t} = \frac{1+g_t^K}{1+n} k_t$$

のような，ややトリッキーな展開を理解する必要があった.

このノートでは図 1 をつかって，資本と労働の成長率－資本と労働の増加速度・スピードと解釈できる—を直接比較している．いうまでもなく，資本が増える速度が，労働の速度より速い（遅い）ならば，その比率である一人当たり資本，$k_t \equiv K_t/L_t$，は徐々に大きく（小さく）ならなくてはいけない．このシンプルな事実のみをつかって，**生産要素の成長率のグラフィカルな比較によって，数学的厳密さを失うことなく，定常状態の一意性，存在，安定性を明らかにしている．**この点も，数学の知識を十分に有さない学部学生にソローモデルを解説する上での利点となりうるはずである.

4. 技術進歩があるケース

4.1. 外生的技術進歩

外生的な技術進歩が存在する場合も，すなわち $g > 0$ の場合も，同様の方法で長期均衡の性質を理解することができる.効率単位で測った一人当たり資本を $\tilde{k}_t \equiv \frac{K_t}{A_t L_t}$ と定義すれば，

る；$k^* = \frac{s(1-\alpha)}{n+\delta-\alpha s}$.

[5] 具体的には，$\left.\frac{Y_{t+1}-Y_t}{Y_t}\right|_{\text{定常状態}} = \frac{\alpha K_t}{\alpha K_t+(1-\alpha)L_t}\underbrace{\frac{K_{t+1}-K_t}{K_t}}_{=n} + \frac{(1-\alpha)L_t}{\alpha K_t+(1-\alpha)L_t}\underbrace{\frac{L_{t+1}-L_t}{L_t}}_{=n} = n.$

(5) は次のように書き直すことができる:

(5b) $g_t^A = \frac{s(1-\alpha)}{\tilde{k}_t} + \alpha s - \delta.$

(4) と (5b) を使えば, 図 1 と本質的には同じ分析によって, ソローモデルの長期均衡の性質をしめすことができる. 経済はただ 1 つ存在する安定的な定常状態に収束し、そこでは, 資本 K_t の成長率と効率労働 $A_t L_t$ の成長率は同じ, すなわち,

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = \frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_t L_t} = (1+n)(1+g)$$

となる. この事実と生産関数 (1) によって, 定常状態における経済成長率は人口成長率と技術進歩率の和, $n+g$, と等しく, 一人当たり GDP 成長率は技術進歩率, g, と等しいことをしめすことができる.[6] これらの結果は, やはり, 一般的に知られるソローモデルの基本的な性質と同じである.

4.2 内生的技術進歩

発展的な拡張分析として, 内生的な技術進歩のケースについても, ごく手短に検討しておく. Rivera-Batiz and Romer (1991) による, いわゆる lab-equipment タイプのローマーモデルの, toy-model バージョンを考えてみよう. Lab-equipment モデルの基本的なアイディアは, 技術進歩をドライブするイノベーション活動が, 財の生産部門と同じ技術を有しているということである. そこで本ノートでは, 技術進歩が財 Y_t を投資することで発生すると仮定する. I_t^A を技術進歩に投資される財であるとすれば, 技術進歩のサイズを,

(6) $A_{t+1} - A_t = I_t^A$

と書いてもよい. また, 総貯蓄のうち $\iota \in [0,1]$ の割合は技術進歩に, $1-\iota$ の割合は資本蓄積に投資されると考えよう. そうすると, 次のような投資関数を得る:

(7) $I_t = (1-\iota)sY_t$ and $I_t^A = \iota s Y_t$.

---

[6] 定常状態において, $1 + \frac{\frac{Y_{t+1}}{L_{t+1}} - \frac{Y_t}{L_t}}{\frac{Y_t}{L_t}} = \frac{1}{1+n}\frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{1}{1+n}\left(\frac{\alpha K_t}{Y_t}\frac{K_{t+1}}{K_t} + \frac{(1-\alpha)A_t L_t}{Y_t}\frac{A_{t+1}L_{t+1}}{A_t L_t}\right) = 1+g$ が成立することに注意せよ.

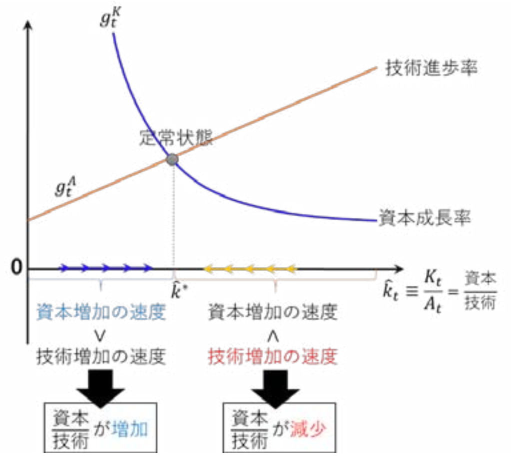

図２: 資本成長率と内生的技術進歩率を比較する

簡単化のために人口成長率をゼロとおく ($n = 0$ および $L_t = 1$). (1), (3) および (7) を使って, 資本成長率を次のように導出できる: 技術水準で割り引いた資本を $\hat{k}_t \equiv K_t/A_t$ と定義すれば,

(8a) $g_t^K = \frac{(1-\iota)s(1-\alpha)}{\hat{k}_t} + (1-\iota)\alpha s - \delta.$

また, (1), (6) および (7) をつかって, 内生的技術進歩率—g_t^Aとおこう—を次のように導出することができる:

(8b) $g_t^A = \frac{A_{t+1}-A_t}{A_t} = \frac{I_t^A}{A_t} = \iota s\alpha\, \hat{k}_t + \iota s(1-\alpha).$

図２は, それぞれを技術で割り引いた資本の関数として, 資本成長率 (青い曲線) と技術進歩率 (オレンジの直線) を比較したものである。この比較により, ただ１つ存在する定常状態 $\hat{k}^*$ が大域的に安定であることがわかる.

定常状態における経済成長率の特徴づけは, やや煩雑な計算を繰り返す必要があるが, 解析的に行うことができ, 成長率が, 貯蓄率等のパラメーターに依存して, 内生的に決定されることをしめすことはそう難しくない. この点において, 長期成長率が選好や生産性パラメーターによって内生的に決定されるという内生的成長モデルのエッセンスは, ここでしめ

した toy-model バージョンにおいても失われていない.

５．むすびにかえて

このノートでは, 資本と労働が完全代替的なソローモデルを解説し, より一般的な新古典派生産関数 (e.g., 一般型, コブ・ダグラス型, CES 型などを含む) をもちいる標準的なソローモデルと, 定性的に同様な結果が成立することをグラフィカルなアプローチでしめした. そこで使われる数学的技術はシンプルかつ初歩的なものに限られており, 本ノートで示した線形技術のソローモデルとその分析方法は, 経済成長モデルのエッセンスと, 現在の経済成長論における "the focus of exciting research in economics" (Acemoglu 2013) を（特に低学年の）学部学生に伝える１つのメソッドとして, 多少なりとも有用ではないだろうかと, 筆者は考えている.

参考文献

Acemoglu, D. 2013. "Economic growth and development in the undergraduate curriculum." *Journal of Economic Education* 44, 169－177.

Acemoglu, D., and P. Restrepo. 2018. "The race between man and machine: Implications of technology for growth, factor shares and employment." *American Economic Review* 108, 1488－1542.

Chu, A. 2018. "From Solow to Romer: Teaching endogenous technological change in undergraduate economics." *International Review of Economics Education* 27, 10－15.

Lucas, R. 1988. "On the mechanics of economic development." *Journal of Monetary Economics* 22, 3－42.

Ramsey, F. 1928. "A mathematical theory of saving." *Economic Journal* 38, 543–559.

Rivera-Batiz, L., and P. Romer. 1991. "Economic integration and endogenous growth." *Quarterly Journal of Economics* 106, 531－555.

Romer, P. 1990. "Endogenous technological change." *Journal of Political Economy* 98, S71－S102.

Solow, R. 1956. "A contribution to the theory of economic growth." *Quarterly Journal of Economics* 70, 65－94.